Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

13

а) Решите уравнение $\left(2\cos^2 x+\sin x-2\right)\sqrt{5\operatorname{tg} x}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

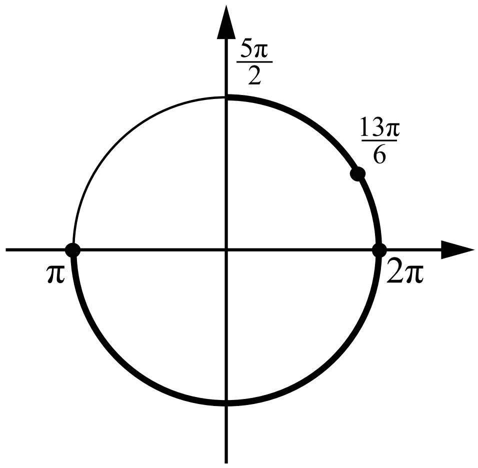
Решение.

а)

$$\left(2\cos^2 x+\sin x-2\right)\sqrt{5\operatorname{tg} x}=0; \quad \left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x=0,\\ \begin{cases}\operatorname{tg} x\ge 0,\\ 2\cos^2 x+\sin x-2=0;\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x=0,\\ \begin{cases}\operatorname{tg} x\ge 0,\\ \sin x-2\sin^2 x=0;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x=0,\\ \begin{cases}\operatorname{tg} x\ge 0,\\ \sin x\left(1-2\sin x\right)=0,\end{cases}\end{array}\right.$$

откуда $x=\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, или $x=\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.



б) Корни, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$, отберём с помощью единичной окружности.

Получаем π, 2π и $\frac{13\pi}{6}$.

Ответ: а) πn, $n\in\mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) π; 2π; $\frac{13\pi}{6}$.

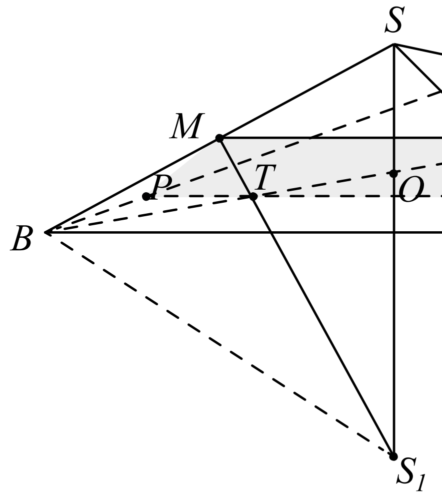
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 Все рёбра правильной треугольной пирамиды $SBCD$ с вершиной S равны 9. Основание O высоты SO этой пирамиды является серединой отрезка SS_1, M — середина ребра SB, точка L лежит на ребре CD так, что $CL : LD = 7 : 2$.

а) Докажите, что сечение пирамиды $SBCD$ плоскостью S_1LM — равнобокая трапеция.

б) Вычислите длину средней линии этой трапеции.

Решение.



а) Проведём медиану S_1M треугольника SS_1B, которая пересекает медиану BB_1 основания BCD в точке T. Тогда $BT : TB_1 = 4 : 5$, поскольку BB_1 также является медианой треугольника SS_1B.

Точка L, в свою очередь, делит отрезок B_1D в отношении $DL : LB_1 = 4 : 5$, так как $LD : LC = 2 : 7$ и отрезок BB_1 — медиана треугольника BCD. Следовательно, сторона сечения, проходящая через точки L и T, параллельна стороне BD основания BCD. Пусть прямая LT пересекает BC в точке P.

Проведём через точку M среднюю линию в треугольнике SBD, пусть она пересекает сторону SD в точке K. Тогда $PMKL$ — искомое сечение, причём $BP = DL$ и $BM = KD$. Из равенства треугольников BMP и DKL получим $MP = KL$, а значит, $PMKL$ — равнобокая трапеция.

б) Большее основание PL трапеции равно 7, поскольку треугольник LPC правильный. Второе основание MK равно 4,5, поскольку MK — средняя линия правильного треугольника SBD. Следовательно, средняя линия трапеции равна $\dfrac{7+4{,}5}{2} = 5{,}75$.

Ответ: б) 5,75.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство $\frac{(5x-3)^2}{x-2} \ge \frac{9-30x+25x^2}{14-9x+x^2}$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\frac{(5x-3)^2}{x-2} \ge \frac{9-30x+25x^2}{14-9x+x^2}; \quad \frac{(5x-3)^2}{x-2} - \frac{(5x-3)^2}{(x-2)(x-7)} \ge 0;$$

$$\frac{(5x-3)^2(x-8)}{(x-2)(x-7)} \ge 0; \quad \left[\begin{array}{l} x = 0{,}6; \\ 2 < x < 7; \\ x \ge 8. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{0{,}6\} \cup (2;\,7) \cup [8;\,+\infty)$.

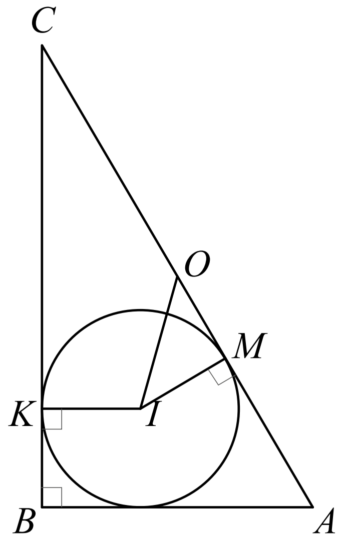
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 В треугольник ABC вписана окружность радиуса R, касающаяся стороны AC в точке M, причём $AM = 2R$ и $CM = 3R$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Найдите расстояние между центрами его вписанной и описанной окружностей, если известно, что $R = 2$.

Решение.



а) Пусть вписанная окружность касается стороны BC в точке K. Обозначим $BK = x$. Пусть S — площадь треугольника, p — полупериметр.

Тогда $p = 2R + 3R + x = 5R + x$, $S = pR = R(5R + x)$.

С другой стороны, по формуле Герона

$$S = \sqrt{p(p - AB)(p - BC)(p - AC)} = \sqrt{(5R + x) \cdot 2R \cdot 3R \cdot x} = \\ = R\sqrt{6x(5R + x)}.$$

Из уравнения $R(5R + x) = R\sqrt{6x(5R + x)}$ получаем, что $R = x$. Стороны треугольника ABC равны $5R$, $4R$ и $3R$, следовательно, этот треугольник прямоугольный с прямым углом при вершине B.

б) Пусть I и O — центры соответственно вписанной и описанной окружностей треугольника ABC. Точка O — середина гипотенузы $AC = 5R = 10$, и $OM = AO - AM = 5 - 2R = 1$.

Тогда $IO = \sqrt{OM^2 + MI^2} = \sqrt{1^2 + R^2} = \sqrt{5}$.

Ответ: б) $\sqrt{5}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 По вкладу «А» банк в течение трёх лет в конце каждого года увеличивает на 10 % сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивает на 11 % в течение каждого из первых двух лет. Найдите наименьшее целое число процентов за третий год по вкладу «Б», при котором за все три года этот вклад всё ещё останется выгоднее вклада «А».

Решение.
Пусть на каждый тип вклада была внесена сумма S. На вкладе «А» каждый год сумма увеличивается на 10 %, т. е. умножается на коэффициент $1{,}1$. Тогда через три года сумма на вкладе «А» равна $1{,}1^3 S = 1{,}331S$. Аналогично на вкладе «Б» сумма через три года будет равна

$$1{,}11^2\left(1+\frac{n}{100}\right)S = 1{,}2321\left(1+\frac{n}{100}\right)S,$$

где n — натуральное число.
По условию требуется найти наименьшее целое решение неравенства

$$1{,}2321\left(1+\frac{n}{100}\right)S > 1{,}331S;$$

$$n > 100\frac{13310-12321}{12321} = 100\frac{989}{12321} = 8{,}02...;$$

$$n = 9.$$

Ответ: 9.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2+y^2+2(2y-x)a=1+2a-4a^2, \\ x^2+y^2+4(x-y)a=4+4a-7a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Запишем систему в виде

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y+2a)^2=(1+a)^2, \\ (x+2a)^2+(y-2a)^2=(2+a)^2. \end{cases}$$

Если $a\neq -1,\ a\neq -2$, то каждое уравнение системы есть уравнение окружности. В этом случае система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда расстояние между центрами этих окружностей равно сумме или разности их радиусов.

При $a=-1$ имеем систему

$$\begin{cases} (x+1)^2+(y-2)^2=0, \\ (x-2)^2+(y+2)^2=1. \end{cases}$$

Эта система решений не имеет. Следовательно, $a=-1$ условию задачи не удовлетворяет.

При $a=-2$ имеем систему

$$\begin{cases} (x+2)^2+(y-4)^2=1, \\ (x-4)^2+(y+4)^2=0. \end{cases}$$

Эта система тоже решений не имеет. Следовательно, и $a=-2$ условию задачи не удовлетворяет.

Пусть $a\neq -1,\ a\neq -2$. Расстояние O_1O_2 между центрами $O_1(a, -2a)$ и $O_2(-2a, 2a)$ равно $O_1O_2=\sqrt{9a^2+16a^2}=5|a|$, а радиусы $R_1=|a+1|$ и $R_2=|a+2|$. Решим два уравнения: (1) $O_1O_2=R_1+R_2$ и (2) $O_1O_2=|R_1-R_2|$. Уравнение (1) имеет вид $5|a|=|a+1|+|a+2|$; уравнение (2) имеет вид $5|a|=\big||a+1|-|a+2|\big|$. Решением уравнения (1) являются числа 1 и $-\frac{3}{7}$.

Решением уравнения (2) являются числа $\pm\frac{1}{5}$.

Ответ: $-\frac{3}{7};\ -\frac{1}{5};\ \frac{1}{5};\ 1$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a, но ответ содержит лишнее значение	3
С помощью верного рассуждения получены одно или несколько значений a	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения двух окружностей (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Будем называть четырёхзначное число очень счастливым, если все цифры в его десятичной записи различны, а сумма первых двух из этих цифр равна сумме последних двух из них. Например, очень счастливым является число 3140.

а) Существуют ли десять последовательных четырёхзначных чисел, среди которых есть два очень счастливых?

б) Может ли разность двух очень счастливых четырёхзначных чисел равняться 2015?

в) Найдите наименьшее натуральное число, для которого не существует кратного ему очень счастливого четырёхзначного числа.

Решение.

а) Примером таких чисел являются 3012, 3013, …, 3021. Первое и последнее из них являются очень счастливыми.

б) Предположим, что это возможно. Пусть $\overline{abcd}$ — десятичная запись меньшего из этих двух очень счастливых чисел, а $\overline{klmn}$ — десятичная запись большего из них. Из условия следует, что либо $10c+d+15=10m+n$, либо $10c+d+15=100+10m+n$. Отсюда получаем, что либо $(m+n)-(c+d)=9(c-m+1)+6$, либо $(m+n)-(c+d)=9(c-m-10)+5$. Значит, число $(m+n)-(c+d)$ даёт при делении на 9 или остаток 6, или остаток 5.

Также из условия следует, что либо $1000a+100b+2000=1000k+100l$, либо $1000a+100b+2100=1000k+100l$. Отсюда получаем, что либо $(k+l)-(a+b)=9(a-k+2)+2$, либо $(k+l)-(a+b)=9(a-k+2)+3$. Значит, число $(k+l)-(a+b)$ даёт при делении на 9 или остаток 2, или остаток 3.

Приходим к противоречию, так как по условию $(k+l)-(a+b)=(m+n)-(c+d)$.

в) Покажем, что искомое число равно 11. Для этого сначала приведём примеры очень счастливых четырёхзначных чисел, кратных 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10: число 2680 кратно 1, 2, 4, 5, 8 и 10; число 1890 кратно 3, 6, 7 и 9.

Пусть $\overline{abcd}$ — десятичная запись какого-либо очень счастливого числа, кратного 11. Тогда

$$\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d = 11(91a + 9b + c) + (b - a + d - c).$$

Получаем, что число $b - a + d - c$ кратно 11. Поскольку a, b, c и d — цифры, отсюда следует, что либо $b - a + d - c = 0$, либо $b - a + d - c = 11$, либо $b - a + d - c = -11$.

В первом случае имеем $a + b = c + d$ и $a + c = b + d$. Вычитая эти равенства, получаем $b - c = c - b$, т. е. $b = c$, — противоречие. Во втором случае имеем $a + b = c + d$ и $a + c + 11 = b + d$. Вычитая эти равенства, получаем $b - c - 11 = c - b$, т. е. $2(b - c) = 11$, — тоже противоречие, так как 11 не кратно 2. Аналогичное противоречие получается и в третьем случае. Значит, не существует очень счастливых четырёхзначных чисел, кратных 11.

Ответ: а) Да, например, 3012, 3013, …, 3021; б) нет; в) 11.

Содержание критерия	**Баллы**
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – пример в п. *а*, – обоснованное решение в п. *б*, – искомая оценка в п. *в*, – пример в п. *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

13 а) Решите уравнение $\left(\sqrt{2}\sin^2 x+\cos x-\sqrt{2}\right)\sqrt{-6\sin x}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\ \dfrac{7\pi}{2}\right]$.

Решение.

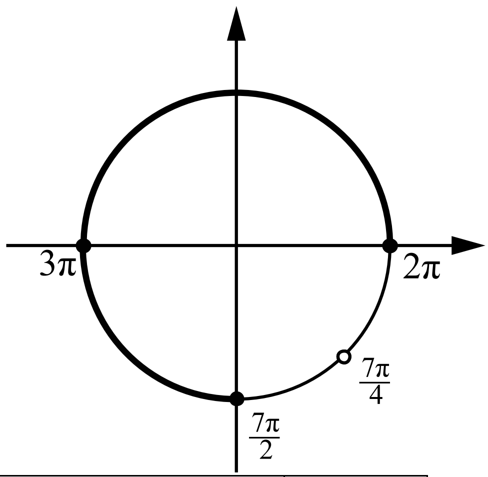
а)

$$\left(\sqrt{2}\sin^2 x+\cos x-\sqrt{2}\right)\sqrt{-6\sin x}=0;\quad \left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \begin{cases}\sqrt{2}\sin^2 x+\cos x-\sqrt{2}=0,\\ \sin x\le 0;\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \begin{cases}\cos x-\sqrt{2}\cos^2 x=0,\\ \sin x\le 0;\end{cases}\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \begin{cases}\cos x\left(1-\sqrt{2}\cos x\right)=0,\\ \sin x\le 0,\end{cases}\end{array}\right.$$

откуда $x=\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, или $x=-\dfrac{\pi}{4}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, или $x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$.

б) Корни, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\ \dfrac{7\pi}{2}\right]$, отберём с помощью единичной окружности.



Получаем 2π, 3π и $\dfrac{7\pi}{2}$.

Ответ: а) $x=\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $x=-\dfrac{\pi}{4}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$; б) 2π; 3π; $\dfrac{7\pi}{2}$.

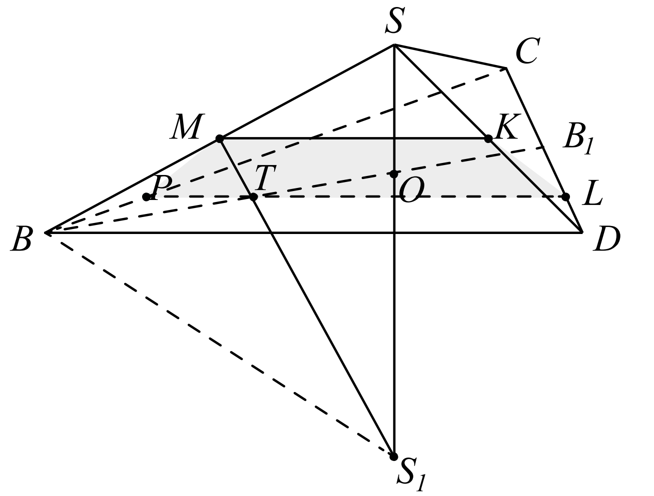
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 Все рёбра правильной треугольной пирамиды $SBCD$ с вершиной S равны 18. Основание O высоты SO этой пирамиды является серединой отрезка SS_1, M — середина ребра SB, точка L лежит на ребре CD так, что $CL:LD=7:2$.

а) Докажите, что сечение пирамиды $SBCD$ плоскостью S_1LM — равнобокая трапеция.

б) Вычислите длину средней линии этой трапеции.

Решение.



а) Проведём медиану S_1M треугольника SS_1B, которая пересекает медиану BB_1 основания BCD в точке T. Тогда $BT:TB_1=4:5$, поскольку BB_1 также является медианой треугольника SS_1B.

Точка L, в свою очередь, делит отрезок B_1D в отношении $DL:LB_1=4:5$, так как $LD:LC=2:7$ и отрезок BB_1 — медиана треугольника BCD. Следовательно, сторона сечения, проходящая через точки L и T, параллельна стороне BD основания BCD. Пусть прямая LT пересекает BC в точке P.

Проведём через точку M среднюю линию в треугольнике SBD, пусть она пересекает сторону SD в точке K. Тогда $PMKL$ — искомое сечение, причём $BP=DL$ и $BM=KD$. Из равенства треугольников BMP и DKL получим $MP=KL$, а значит, $PMKL$ — равнобокая трапеция.

б) Большее основание PL трапеции равно 14, поскольку треугольник LPC правильный. Второе основание MK равно 9, поскольку MK — средняя линия правильного треугольника SBD. Следовательно, средняя линия трапеции равна $\frac{14+9}{2}=11{,}5$.

Ответ: б) 11,5.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15

Решите неравенство $\frac{(5x-2)^2}{x-3} \geq \frac{4-20x+25x^2}{24-11x+x^2}$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\frac{(5x-2)^2}{x-3} \geq \frac{4-20x+25x^2}{24-11x+x^2}; \quad \frac{(5x-2)^2}{x-3} - \frac{(5x-2)^2}{(x-3)(x-8)} \geq 0;$$

$$\frac{(5x-2)^2(x-9)}{(x-3)(x-8)} \geq 0; \quad \left[\begin{array}{l} x = 0,4; \\ 3 < x < 8; \\ x \geq 9. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{0,4\} \cup (3; 8) \cup [9; +\infty)$.

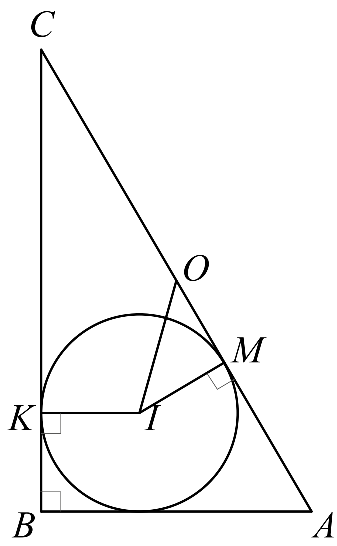
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16

В треугольник ABC вписана окружность радиуса R, касающаяся стороны AC в точке M, причём $AM = 5R$ и $CM = 1,5R$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Найдите расстояние между центрами его вписанной и описанной окружностей, если известно, что $R = 4$.



Решение.

а) Пусть вписанная окружность касается стороны BC в точке K. Обозначим $BK = x$. Пусть S — площадь треугольника, p — полупериметр. Тогда

$$p = 5R + 1{,}5R + x = 6{,}5R + x,\ S = pR = R\left(6{,}5R + x\right).$$

С другой стороны, по формуле Герона

$$S = \sqrt{p\left(p - AB\right)\left(p - BC\right)\left(p - AC\right)} =$$
$$= \sqrt{\left(6{,}5R + x\right)\cdot 5R\cdot 1{,}5R\cdot x} = R\sqrt{7{,}5x\left(6{,}5R + x\right)}.$$

Из уравнения $R\left(6{,}5R + x\right) = R\sqrt{7{,}5x\left(6{,}5R + x\right)}$ получаем, что $R = x$. Стороны треугольника ABC равны $6{,}5R$, $6R$ и $2{,}5R$, следовательно, этот треугольник прямоугольный с прямым углом при вершине B.

б) Пусть I и O — центры соответственно вписанной и описанной окружностей треугольника ABC. Точка O — середина гипотенузы $AC = 6{,}5R = 26$, и $OM = CO - CM = 13 - 1{,}5R = 7$.

Тогда $IO = \sqrt{OM^2 + MI^2} = \sqrt{7^2 + R^2} = \sqrt{65}$.

Ответ: б) $\sqrt{65}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 По вкладу «А» банк в течение трёх лет в конце каждого года увеличивает на 20 % сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивает на 21 % в течение каждого из первых двух лет. Найдите наименьшее целое число процентов за третий год по вкладу «Б», при котором за все три года этот вклад всё ещё останется выгоднее вклада «А».

Решение.

Пусть на каждый тип вклада была внесена сумма S. На вкладе «А» каждый год сумма увеличивается на 20%, т. е. умножается на коэффициент $1{,}2$. Тогда через три года сумма на вкладе «А» равна $1{,}2^3 S = 1{,}728S$. Аналогично на вкладе «Б» сумма через три года будет равна

$$1{,}21^2\left(1+\frac{n}{100}\right)S = 1{,}4641\left(1+\frac{n}{100}\right)S,$$

где n — натуральное число.

По условию требуется найти наименьшее целое решение неравенства

$$1{,}4641\left(1+\frac{n}{100}\right)S > 1{,}728S;$$

$$n > 100\frac{17280-14641}{14641} = 100\frac{2639}{14641} = 18{,}02...;\quad n = 19.$$

Ответ: 19.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2+y^2-2(2y-x)a=1-2a-4a^2, \\ x^2+y^2-4(x-y)a=4-4a-7a^2 \end{cases}$$

не имеет решений.

Решение.

Запишем систему в виде

$$\begin{cases} (x+a)^2+(y-2a)^2=(1-a)^2, \\ (x-2a)^2+(y+2a)^2=(2-a)^2. \end{cases}$$

Если $a \neq 1,\ a \neq 2$, то каждое уравнение системы есть уравнение окружности. В этом случае система не имеет решений тогда и только тогда, когда расстояние между центрами этих окружностей больше суммы или меньше разности их радиусов.

При $a=1$ имеем систему

$$\begin{cases} (x+1)^2+(y-2)^2=0, \\ (x-2)^2+(y+2)^2=1. \end{cases}$$

Эта система решений не имеет. Следовательно, $a=1$ удовлетворяет условию задачи.

При $a=2$ имеем систему

$$\begin{cases} (x+2)^2+(y-4)^2=1, \\ (x-4)^2+(y+4)^2=0. \end{cases}$$

Эта система тоже решений не имеет. Следовательно, и $a=2$ удовлетворяет условию задачи.

Пусть $a \neq 1,\ a \neq 2$. Расстояние O_1O_2 между центрами $O_1(-a, 2a)$ и $O_2(2a, -2a)$ равно $O_1O_2=\sqrt{9a^2+16a^2}=5|a|$, а радиусы $R_1=|1-a|$ и $R_2=|2-a|$. Решим два неравенства: (1) $O_1O_2>R_1+R_2$ и 2) $O_1O_2<|R_1-R_2|$. Неравенство (1) имеет вид $5|a|>|1-a|+|2-a|$; неравенство (2) имеет вид $5|a|<\left||1-a|-|2-a|\right|$. Решением неравенства (1) являются промежутки $(-\infty; -1)$ и $\left(\frac{3}{7}; +\infty\right)$. Решением неравенства (2) является промежуток $\left(-\frac{1}{5}; \frac{1}{5}\right)$.

Ответ: $(-\infty; -1)\cup\left(-\frac{1}{5}; \frac{1}{5}\right)\cup\left(\frac{3}{7}; +\infty\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все промежутки значений *a*, возможно, с включением граничных точек	3
С помощью верного рассуждения получены один или несколько промежутков значений, возможно, с включением граничных точек *a*	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения двух окружностей (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Будем называть четырёхзначное число очень счастливым, если все цифры в его десятичной записи различны, а сумма первых двух из этих цифр равна сумме последних двух из них. Например, очень счастливым является число 3140.

а) Существуют ли двадцать последовательных четырёхзначных чисел, среди которых есть три очень счастливых?

б) Может ли разность двух очень счастливых четырёхзначных чисел равняться 2016?

в) Найдите наименьшее простое число, для которого не существует кратного ему очень счастливого четырёхзначного числа.

Решение.

а) Примером таких чисел являются 5014, 5015, …, 5033. Очень счастливыми среди них являются числа 5014, 5023 и 5032.

б) Предположим, что это возможно. Пусть $\overline{abcd}$ — десятичная запись меньшего из этих двух очень счастливых чисел, а $\overline{klmn}$ — десятичная запись большего из них. Из условия следует, что либо $10c+d+16=10m+n$, либо $10c+d+16=100+10m+n$. Отсюда получаем, что либо $(m+n)-(c+d)=9(c-m+1)+7$, либо $(m+n)-(c+d)=9(c-m-10)+6$. Значит, число $(m+n)-(c+d)$ даёт при делении на 9 или остаток 7, или остаток 6.

Также из условия следует, что либо $1000a+100b+2000=1000k+100l$, либо $1000a+100b+2100=1000k+100l$. Отсюда получаем, что либо $(k+l)-(a+b)=9(a-k+2)+2$, либо $(k+l)-(a+b)=9(a-k+2)+3$. Значит, число $(k+l)-(a+b)$ даёт при делении на 9 или остаток 2, или остаток 3.

Приходим к противоречию, так как по условию $(k+l)-(a+b)=(m+n)-(c+d)$.

в) Покажем, что искомое число равно 11. Для этого сначала приведём примеры очень счастливых четырёхзначных чисел кратных 2, 3, 5 и 7: число 2680 кратно 2 и 5; число 1890 кратно 3 и 7.

Пусть $\overline{abcd}$ — десятичная запись какого-либо очень счастливого числа, кратного 11. Тогда

$$\overline{abcd}=1000a+100b+10c+d=11(91a+9b+c)+(b-a+d-c).$$

Получаем, что число $b-a+d-c$ кратно 11. Поскольку a, b, c и d — цифры, отсюда следует, что либо $b-a+d-c=0$, либо $b-a+d-c=11$, либо $b-a+d-c=-11$.

В первом случае имеем $a+b=c+d$ и $a+c=b+d$. Вычитая эти равенства, получаем $b-c=c-b$, т. е. $b=c$, — противоречие. Во втором случае имеем $a+b=c+d$ и $a+c+11=b+d$. Вычитая эти равенства, получаем $b-c-11=c-b$, т. е. $2(b-c)=11$, — тоже противоречие, так как 11 не кратно 2. Аналогичное противоречие получается и в третьем случае. Значит, не существует очень счастливых четырёхзначных чисел, кратных 11.

Ответ: а) Да, например, 5014, 5015, …, 5033; б) нет; в) 11.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – пример в п. *а*, – обоснованное решение в п. *б*, – искомая оценка в п. *в*, – пример в п. *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4